OPERADORES SIMÉTRICOS

Definição 33: Sejam V um e.v. real com p.i., W um subespaço de V e $T: W \to V$ um ~~(operador)~~ transf. linear. Dizemos que T é uma ~~operador~~ transform. simétrico em W se

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle \quad \forall\, u, v \in W$$

Obs. Quando $W = V$, na def. 33, T é operador simétrico.

Exemplos: $\mathcal{C}([0,1])$

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

$$W = \{u \in \mathcal{C}^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$$

Seja $T: \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$

$$f(x) \longmapsto -f''(x) + f(x)$$

T é linear!

Vejamos que T é simétrico em W: Sejam, $u, v \in W$

$$\langle T(u), v\rangle = \int_0^1 T(u)(x) \cdot v(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 (-u''(x) + u(x)) \cdot v(x)\, dx$$

$$= -\int_0^1 u''(x) \cdot v(x)\, dx + \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

$$\langle u, T(v)\rangle = \int_0^1 u(x) \cdot T(v(x))\, dx$$

$$= \int_0^1 u(x)\left(-v''(x) + v(x)\right) dx$$

$$= -\int_0^1 u(x)\, v''(x)\, dx + \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$ (integra por partes)

<u>Teorema 34</u>: Seja V e.v. real de dim finita com p.i., $\beta = \{q_1, \ldots, q_n\}$ uma base ortonormal de V e $T: V \to V$ operador linear. Então a matriz $A = [T]_\beta$ é dada por $a_{ij} = \langle T(q_j), q_i\rangle$.

<u>Demonstração</u>: Como $\beta = \{q_1, \ldots, q_n\}$ é base ortonormal então todo $u \in V$ é escrito de modo único como

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, q_i\rangle q_i .$$

Da mesma forma, $T(q_j) \in V$, então

$$T(q_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(q_j), q_i\rangle q_i \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Então
$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \langle T(q_1), q_1\rangle & \cdots & \langle T(q_n), q_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle T(q_1), q_n\rangle & \cdots & \langle T(q_n), q_n\rangle \end{bmatrix}$$

<u>Teorema 35</u>: Sejam V um e.v. real de dim finita com p.i, $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$ base ortonormal para V, $T: V \to V$ op. linear. Então T é operador simétrico se, e somente se, $[T]_\beta$ é uma matriz simétrica.

($\Rightarrow$) Sabemos que a matriz $[T]_\beta$ é dada por:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \langle T(q_1), q_1 \rangle & \cdots & \langle T(q_n), q_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle T(q_1), q_n \rangle & & \langle T(q_n), q_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Como T é operador simétrico,

$$a_{ij} = \langle T(q_i); q_j \rangle = \langle T(q_j); q_i \rangle = a_{ji}$$

Logo $[T]_\beta$ é simétrica.

($\Leftarrow$) Se $[T]_\beta$ é matriz simétrica então

$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i,j = 1, \dots, n$. Logo

$$\langle T(q_j), q_i \rangle = \langle q_j ; T(q_i) \rangle$$

$$\langle T(u), v\rangle = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n}\langle u, q_i\rangle q_i\right), \sum_{i=1}^{n}\langle v, q_i\rangle q_i\right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle u, q_i\rangle T(q_i), \sum_{i=1}^{n}\langle v, q_i\rangle q_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\langle u, q_i\rangle \sum_{i=1}^{n}\langle v, q_i\rangle \langle T(q_i), q_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\langle u, q_i\rangle \sum_{i=1}^{n}\langle v, q_i\rangle \langle q_i, T(q_i)\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle u, q_i\rangle q_i, \sum_{i=1}^{n}\langle v, q_i\rangle T(q_i)\right\rangle$$

$$= \langle u, T(v)\rangle .$$

Logo T é op. simétrico.

Exemplos :

(1) $\mathbb{R}^3$ com p.i usual

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x, y, z) = (x+2y, 2x+3y-z, -y+2z)$

T é operador simétrico ?

β = base canônica do $\mathbb{R}^3$

$T(1,0,0) = (1,2,0) \qquad T(0,1,0) = (2,3,-1) \qquad T(0,0,1) = (0,-1,2)$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

__Definição 34:__ Sejam V um e.v. real com p.i., W subespaço de V e $T: W \to V$ uma ~~operador~~ transf. linear. Dizemos que T é um ~~operador~~ __anti-simétrico__ em W se

$$\langle T(u), v\rangle = -\langle u, T(v)\rangle$$

p/ todos $u, v \in W$.

__Obs:__ Quando $V = W$, na def. 34 T é dito operador anti-simétrico.

__Proposição 5__ Sejam V, e.v. real com p.i e $T: V \to V$ um operador linear anti-simétrico. Então $\langle T(u), u\rangle = 0$ $\forall\, u \in V$.

__Dem:__ Exercício para casa.

__Teorema 36:__ Sejam V um e.v. real de dim finita c/ p.i; $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$ uma base ortonormal de V, $T: V \to V$ operador linear. Então T é operador anti-simétrico se, e somente se, $[T]_\beta$ é uma matriz anti-simétrica.

Dem: Exercício p/ casa.

Exemplos

(1) $\mathbb{R}^3$ com p.i usual

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (-2y+z,\ 2x+3z,\ -x-3y)$

T é anti-simétrico ?

$\beta \equiv$ base canônica

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $V \equiv$ e.v. real com p.i.

$T_1, T_2 \equiv$ operadores simétricos sobre V

$\Downarrow$

p/ quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ $aT_1 + bT_2$ é op. simétrico.

$$\begin{aligned}
\langle (aT_1+bT_2)(u), v\rangle &= \langle aT_1(u) + bT_2(u), v\rangle \\
&= \langle aT_1(u), v\rangle + \langle bT_2(u), v\rangle \\
&= a\langle T_1(u), v\rangle + b\langle T_2(u), v\rangle \\
&= a\langle u, T_1(v)\rangle + b\langle u, T_2(v)\rangle \\
&= \langle u, aT_1(v) + bT_2(v)\rangle \\
&= \langle u, (aT_1+bT_2)(v)\rangle.
\end{aligned}$$

OPERADORES ORTOGONAIS

<u>Definição</u> 35 Sejam V um e.v. real com p.i e W subespaço de V. Seja $T: W \to V$ um (transf.) linear. Dizemos que T é um (transf.) ortogonal em W se

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$\forall\, u, v \in W$

<u>Obs</u>: $V = W$ na def. 35, T é operador ortogonal.

<u>Observação</u>: $T \equiv$ operador ortogonal então:

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 \Rightarrow$$

$$\|T(u)\| = \|u\| .$$

<u>Definição</u> 36 Seja V um e.v. real normado e ~~um~~ $T: V \to W$ transformação linear. (~~Uma isometria~~) T é uma isometria se $\forall\, v \in V$, $\|T(v)\| = \|v\|$

<u>Obs</u>: Todo operador ortogonal é isometria

Quando existir uma isometria entre V e W, dizemos que eles são isométricos.

Proposição 6: Seja V um e.v. real de dim finita com p.i. e T um op. ortogonal sobre V. Então T é isomorfismo.

Dem: → T é linear OK!

→ T é injetora:

$$v \in Ker(T) \Rightarrow T(v) = 0_V \Rightarrow$$

$$\|T(v)\| = 0_V \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V.$$

→ T é sobrejetora

$$\dim V = \dim Ker(T) + \dim Im(T)$$
$$= 0 + \dim Im(T) \Rightarrow V = Im(T).$$

Proposição 8 V = e.v. real com p.i. (V dim finita) e $T: V \to V$ isometria. Então T^{-1} é isometria.

Dem: Note que como T é isometria então T é um isomorfismo. Então T é uma aplicação linear bijetora. E ptto $\exists\, T^{-1}: V \to V$ aplicação inversa de T. Desse modo,

$$\langle T^{-1}(u), T^{-1}(v)\rangle = \langle T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(v))\rangle = \langle u, v\rangle$$

Logo $\forall\, u \in V$ $\|T^{-1}(u)\| = \|u\|$. E c/ isso T é isometria.

Proposição: $V \equiv$ e.v. real com p.i, $T: V \to V$ op. linear. Então T é isometria se, e somente se, T é um op. ortogonal em V.

($\Rightarrow$) Se T é isometria $\Rightarrow$

$$\langle T(u-v), T(u-v) \rangle = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u,u \rangle - 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

Por outro lado,

$$\langle T(u-v), T(u-v) \rangle = \langle T(u), T(u) \rangle - 2\langle T(u), T(v) \rangle + \langle T(v), T(v) \rangle$$

$$= \langle u,u \rangle - 2\langle T(u), T(v) \rangle + \langle v,v \rangle$$

Logo $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u,v \rangle$

($\Leftarrow$) É imediata.

Teorema 37: $V \equiv$ e.v. real, dim finita c/ p.i, $\beta = \{q_1, \ldots, q_n\}$ base ortonormal de V, $T: V \to V$ op. linear. Então T é ortogonal em V se, e somente se, leva a base ~~ortogonal~~ ortonormal β na base ortonormal $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$.

Dem: X.

Definição 37 Dizemos que $Q \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz ortogonal se $Q^t Q = I$.

$$\boxed{QQ^t = I \Rightarrow Q^{-1} = Q^t.}$$

PROJEÇÃO ORTOGONAL

Definição 38 Seja V um e.v. real com p.i, S subespaço de dim-finita de V, $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$ base ortonormal de S. Dado $u \in V$, o elemento $\in S$ definido por

$$\text{proj}_S u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle q_j$$

é a proj. ortogonal de u sobre o subespaço S, o elemento $w = u - \text{proj}_S u$ é a proj. ortogonal do elemento u sobre o subespaço $S^\perp$.

Exemplos:

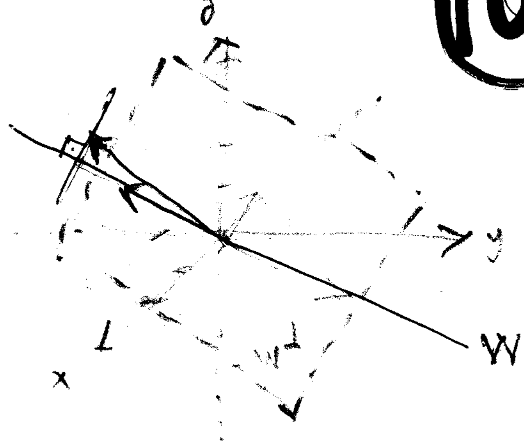
① $\mathbb{R}^3$ c/ p.i usual

$W = [(1,-1,2)]$

Calcule a $\text{proj}_W (2,-1,4) = ?$ $\quad \text{proj}_{W^\perp}(2,-1,4) = ?$

Exemplos

① $\mathbb{R}^3$ c/ p.i usual



$W = [(1,-1,2)]$

$u = (2,-1,4)$

$$proj_W u = \frac{\langle u, (1,-1,2)\rangle}{\langle (1,-1,2),(1,-1,2)\rangle} \cdot (1,-1,2)$$

$$proj_{W^\perp} u = u - proj_W u$$

② $V \equiv$ e.v. real. com p.i.

$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot,\cdot \rangle}$

$u, v \in V$, $v \neq 0_V$

? $w^* \in S = \{w \in V : w = u - tv , t \in \mathbb{R}\}$

que possui a menor norma ?

Ou seja $\|w^*\| \leq \|w\|$ $\forall\, w \in S$

Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(t) = \|u - tv\|^2$

$g'(t) = 0 \iff t = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$ (ponto crítico de g)

classificá-lo usando o teste da segunda derivada

Fr $g''(t) < 0$, g tem valor máximo global em c
$g''(t) > 0$, g tem valor mínimo global em c ⫡

Fr $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$ ⫡

$g''(t) = 2\langle v, v\rangle > 0$ pois $v \neq 0_V$.

Então t é ponto de mínimo e

$w^* = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v$ é o vetor em S

que possui a menor norma!

$U = [v] \Rightarrow \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v$ é a $proj_U\, u$

e

w^* é a $proj_{U^\perp}\, u$.

Definição 39: Seja V um e.v. real com p.i., e S subespaço de V de dim. finita, com base ortonormal $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$. O operador linear $P: V \to V$ definido

$$P(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle q_j \qquad \forall\, u \in V.$$

é chamado de operador de projeção ortogonal sobre o subespaço S.

Obs: $\mathrm{Im}(P) = S$.

Teorema 38: V = e.v. real com p.i, S sub. de dim. finita de V, $P: V \to V$ op. de proj. ortog. Então P é um operador simétrico.

Dem: $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$ uma base ortonormal, se $u \in V$ então $P(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle q_j$. Seja $v \in V$, então

$$\begin{aligned}
\langle P(u), v \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle q_j \,,\, v \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle \langle q_j, v \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle \langle v, q_j \rangle
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle u, \langle v, q_j \rangle q_j \rangle$$

$$= \langle u, \sum_{j=1}^{n} \langle v, q_j \rangle q_j \rangle$$

$$= \langle u, P(v) \rangle$$

Por isso P é operador simétrico!

Teorema 39. $V \equiv$ e.v. real com p.i, S subespaço de dim finita de V, $P: V \to V$ op. de proj ortogonal sobre S. Então P é idempotente.

Dem: $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$ base ortonormal, seja $u \in V$, então

$$P^2(u) = P(P(u)) = P\left(\sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle q_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle P(q_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle u, q_j \rangle q_j = P(u).$$

Isso completa a demonstração.

Teorema 10. $V \equiv$ e.v. real c/ p.i, S subespaço de dim. finita de V e $P: V \to V$ ope. de proj. ortog. Então $\operatorname{Ker}(P) = S^{\perp}$.

Demonstração:

"$\subset$" Seja $u \in \operatorname{Ker}(P)$. Então $P(u) = 0_V$.

Logo, p/ qualquer $v \in V$,

$$0 = \langle P(u), v \rangle = \langle u, P(v) \rangle$$

Como $P(v) \in \operatorname{Im}(P) = S$, então $u \in S^{\perp}$.

"$\supset$" $u \in S^{\perp}$, então $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in S$

Como $S = \operatorname{Im}(P)$, então

$$\begin{aligned} 0 = \langle u, v \rangle &= \langle u, P(w) \rangle \quad \forall w \in V \\ &= \langle P(u), w \rangle \quad \forall w \in V \end{aligned}$$

Em particular para $w = P(u)$. Logo $P(u) = 0_V$.

Assim $u \in \operatorname{Ker}(P)$.

12

<u>Teorema 41</u> $V \equiv$ e.v. real com p.i, S sub. de V de dim. finita, $P: V \to V$ op. de proj. ortogonal sobre S.
Então ~~[illegible]~~
$Im(I-P) = S^{\perp}$.

<u>Demonstração</u>: ~~[illegible]~~

: $Im(I-P) = S^{\perp}$

Vejamos que $Im(I-P) = Ker(P)$.

Seja $v \in Im(I-P)$, então $\exists\, w \in V$ tq $v = (I-P)(w)$ logo

$$
\begin{aligned}
P(v) = P((I-P)(w)) &= P(w - P(w)) \\
&= P(w) - P(P(w)) \\
&= P(w) - P(w) \\
&= 0_V
\end{aligned}
$$

logo $Im(I-P) \subset Ker(P)$.

Seja $v \in Ker(P)$, então $P(v) = 0_V$

Então
$$
\begin{aligned}
v &= v - 0_V \\
&= v - P(v) \\
&= (I-P)(v).
\end{aligned}
$$
logo $v \in Im(I-P)$

Por isso $Im(I-P) = Ker(P) = S^{\perp}$
$\uparrow$ Teo —

Exemplos

① $u = (2,1,2,1) \in \mathbb{R}^4$ c/ p.i usual.

$S = [(1,-1,1,-1) ; (-2,1,4,1)]$

$\text{proj}_S u = ?$

② $\mathbb{R}^2$ c/ p.i usual

$W = [(1,2)]$

$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ op. de proj ortogonal

$$P(x,y) = \frac{\langle (x,y), (1,2) \rangle}{\langle (1,2), (1,2) \rangle} \cdot (1,2)$$

$$= \frac{x+2y}{5} (1,2)$$

$$= \frac{1}{5} (x+2y , 2(x+2y))$$

Se V for um e-v real c/ p.i e S um subespaço de dim finita, então se $u \in V$, $\text{proj}_S u$ é o vetor que <u>melhor aproxima u</u> no subespaço S, ou seja,

$$\| u - \text{proj}_S u \| \leq \| u - v \| \quad \forall v \in S.$$

Exemplo:

① $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ c/ p.i $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$

$q(x) = 1 - x^2$

$p(x) = ?$ que melhor aproxima $q(x)$. em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$?

1º Base ortogonal p/ $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

$$q_1(x) = 1$$

$$q_2(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}.$$

$\beta = \{1, x - \frac{1}{2}\}$ é base ortogonal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

2º $\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} q(x)$.

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} q(x) = \frac{\langle q(x), 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 + \frac{\langle q(x), x - \frac{1}{2}\rangle}{\langle x - 1/2, x - 1/2\rangle} \cdot (x - 1/2)$$

$$= \frac{7}{6} - x.$$